Les Elémens de Mathématiques d Varignon, édition posthume de

Par Bernard Maitte (Université de Lille 1)

Les *Elémens de Mathématique* de Varignon sont un ouvrage élémentaire *"pour faciliter à les élèves l'étude de la géométrie"* comme l'écrit l'auteur de la préface de l'édition posthume de 1731 (Varignon est mort en 1722). Les *Elémens de Géométrie*, qui constituent la partie importante de l'ouvrage, ont été écrits en latin par Varignon, ils sont ici traduits par Cochet qui se propose ainsi *"de les rendre utiles à un plus grand nombre de personnes"*. Cochet y ajoute, comme première partie, un autre texte de Varignon, les *Elémens de Mathématique* consacrés à l'algèbre et à l'arithmétique *"pour servir d'introduction à toutes les parties des mathématiques"*.

Dans la première partie Varignon rappelle que *"l'algèbre traite des grandeurs considérées en général"*, et qu'ainsi elle précède les divers chapitres des mathématiques. L'auteur mêle ici arithmétique et algèbre qu'il distingue de la façon suivante :

"L'algèbre emploie dans les calculs les lettres de l'alphabet, & l'arithmétique se sert de signes qu'on appelle chiffres".

Après avoir énoncé, les définitions générales et les axiomes de la théorie des grandeurs, les *Elémens de Mathématique* se divisent en quatre livres, le premier consacré aux quatre opérations, le second consacré à la théorie des proportions, le troisième à l'extraction des racines et le dernier aux équations.
Dans le premier livre, Varignon étudie les quatre opérations, considérant successivement pour chacune d'elle le calcul sur les nombres entiers puis le calcul sur les grandeurs, celles-ci étant représentées par des lettres.
Dans le second livre, Varignon définit deux types de raison, l'arithmétique et la géométrique, s'intéressant essentiellement aux raisons géométriques. La raison géométrique est définie à partir de la division des grandeurs, ce qui conduit à un premier exposé qualitatif, par contre la seconde partie, s'appuyant sur les règles de calcul du premier livre, développe les règles du calcul des raisons et des proportions. Ce second livre s'achève par l'étude des fractions.
Dans le troisième livre, Varignon, après avoir défini les racines et les puissances, étudie successivement l'extraction des racines carrées et des racines cubiques.
Enfin le quatrième livre est une introduction à la notion d'équation.

Comme nous l'avons déjà dit, les *Elémens de Mathématique* peuvent être considérés comme une introduction aux *Elémens de Géométrie*. Ceux-ci comprennent deux parties, la première consacrée à la *géométrie spéculative* (nous dirions aujourd'hui la géométrie rationnelle ou théorique), la seconde à la *géométrie pratique*. Avant de commencer l'exposé, Varignon énonce les axiomes de la géométrie, vérités connues par elle-même, c'est-à-dire qui n'ont pas besoin d'être démontrées. Ces axiomes énoncent les propriétés générales des grandeurs, déjà énoncées dans la première partie, ainsi que l'axiome VII qui précise l'égalité des grandeurs géométriques via la notion d'application d'une grandeur sur une autre. Par contre les définitions et les demandes sont énoncées au cours du développement.

La géométrie spéculative est elle-même divisée en cinq livres.
Le premier livre est consacré aux lignes droites, aux angles et aux lignes circulaires. Varignon y définit les droites parallèles comme des droites également inclinées sur une sécante commune, admettant implicitement que cette propriété est indépendante de la sécante commune, ce qui lui permet d'éviter l'énoncé du postulat des parallèles.
Le second livre est consacré aux surfaces. Après avoir défini les surfaces planes, *"celles que tous les points d'une droite touchent nécessairement"*, et étudier quelques unes de leurs propriétés, Varignon étudie des surfaces planes particulières : les triangles rectilignes, les parallélogrammes.
Le troisième livre est consacré aux proportions. Le début énonce des propriétés du second livre des *Elémens de Mathématique* en y ajoutant les proportions entre grandeurs géométriques. Notons cependant une différence : dans les *Elémens de Mathématique*, Varignon montre que si l'on multiplie deux grandeurs par un même nombre, leur rapport ne change pas alors que cette propriété fait l'objet d'un axiome dans les *Elémens de Géométrie*(1).
Le quatrième livre est consacré aux proportions entre grandeurs géométriques et comprend deux chapitres, le premier consacré aux figures semblables, qu'il appelle *"égales"* dans un premier temps, mais il utilise dans le cours du texte le terme *"semblables"*. Ici encore on est loin de l'exposé euclidien et les démonstrations apparaissent essentiellement comme des explications, ce qui renvoie encore une fois aux conceptions de Port-Royal. Varignon commence par montrer que dans un triangle une parallèle à la base découpe sur les deux autres côtés des segments proportionnels, la démonstration est proche de celle d'Euclide même si elle semble ici peu fondée(2) , le reste s'en déduit. En particulier Varignon montre que le rapport des aires de deux figures rectilignes semblables est comme le rapport des carrés des côtés, quant aux figures curvilignes, on peut les considérer comme des polygones à une infinité de côtés.
Le second chapitre est consacré à la trigonométrie. Celle-ci a pour objet le calcul des côtés et des angles d'un triangle lorsque l'on connaît trois des ces grandeurs dont au moins un côté.
Le cinquième livre est consacré à l'étude des corps solides. De même que les figures planes peuvent être réduites à des triangles, les corps peuvent être réduits à ces pyramides ce qui le conduit à restreindre son étude aux pyramides, laquelle se déduit de l'étude des pyramides. Pour cela Varignon utilisant une méthode analogue à celle des indivisibles, bien que ceux-ci n'interviennent pas explicitement, énonce que les prismes sont *"produits par leurs bases répétées autant de fois qu'il y a de points dans leur hauteur"* et par conséquent *"que ces corps sont égaux au produit de leurs bases multipliées par leurs hauteurs"*. On en déduit que qu'une pyramide est le tiers d'une pyramide qui a même hauteur et même base. Pour étudier les cylindres et les cônes, Varignon considère ces derniers comme des prismes ou des pyramides ayant une infinité de côtés. Il peut alors étudier les sphères.
La deuxième partie est consacrée à divers problèmes de géométrie pratique regroupant des constructions géométriques et des problèmes de géodésie ou de cartographie.

Le style de l'ouvrage et la forme des démonstrations montrent que l'on est plus proche du point de vue de Port-Royal que du point de vue euclidien. On peut alors comparer l'ouvrage de Varignon avec les *Nouveaux Elémens de Géométrie* d'Arnauld (1667) et les *Elémens de Géométrie* de Lamy (1685), il s'agit moins de démonstrations en forme que d'explications, de démonstrations pour éclairer si l'on reprend le langage de Port-Royal(3) , quelques années plus tard Clairaut publiera des *Elémens de Géométrie* de Clairaut (1743) qui reprennent un point de vue analogue. Ce n'est qu'à la fin du siècle que l'on reviendra, en France, à une conception plus proche de celle d'Euclide avec les *Eléments* de Legendre (première édition

1794) à l'usage des élèves des écoles centrales, qui deviendront les lycées. L'ouvrage de Legendre deviendra le modèle de l'enseignement de la géométrie en France jusqu'au milieu du XXème siècle. Contemporain de l'ouvrage de Legendre et destiné au mêmes élèves, un ouvrage de Lacroix, les Eléments de Géométrie(4) , proposera une synthèse entre le point de vue euclidien et le point de vue de Port-Royal.
A ce titre, les *Elémens de Mathématique* de Varignon présentent un intérêt certain pour les historiens de l'enseignement de la géométrie ; écrit par l'un des mathématiciens qui a participé à la naissance du calcul infinitésimal, l'ouvrage de Varignon montre la façon dont certains mathématiciens de l'époque pensaient un premier enseignement des mathématiques plus soucieux de montrer les faits mathématiques que de rigueur formelle, celle-ci étant renvoyée à l'étude des mathématiques transcendantes que constitue le nouveau calcul infinitésimal. On retrouve un point de vue analogue chez Clairaut quelques années plus tard. Notons que, Varignon et Clairaut utilisent dans leurs ouvrages, même si cela garde une forme intuitive, la méthode des indivisibles pour les calculs de volume, ce que l'on peut considérer comme une première approche du calcul intégral. C'est alors dans ce rapport entre une mathématique intuitive, ce qui ne signifie pas qu'elle soit exempte de raisonnement, et les méthodes nouvelles que se situe l'intérêt des ouvrages de Varignon et de Clairaut(5).

Notes :
(1) Rappelons que les Elemens de Mathematique et les Elemens de géométrie sont deux ouvrages indépendants et que leur réunion dans un même ouvrage est une décision d'éditeur.
(2) Varignon n'aborde pas la question des irrationnelles.
(3) Antoine Arnauld, Pierre Nicole, *La Llogique de Port-Royal* (1667), quatrième partie.
(4) L'ouvrage de Lacroix s'inscrit dans un ensemble d'ouvrages portant sur les divers chapitres des mathématiques enseignés dans les écoles centrales puis les lycées. (5) Autant dire qu'après la mise en ligne de l'ouvrage, il serait utile de publier en ligne celui de Clairaut.